53. Rátz László Vándorgyűlés
Békéscsaba, 2013. július 2-5.

Néhány „jól ismert" összefüggésről

Győry Ákos
Földes Ferenc Gimnázium, Miskolc

Amikor elvégeztem az egyetemet, naiv módon azt gondoltam, hogy sokmindent tudok a középiskolai matematikából, ám eddigi tanári pályafutásom alatt gyakran találtam szembe magam olyan versenyfeladatokkal, amelyek megoldása egy-egy olyan összefüggésre hivatkozott, amiről addig nem hallottam. Ilyen volt például a következő KöMaL-feladat (A. 405).

Az a, b, c, x, y, z valós számokra teljesül, hogy $a \geq b \geq c > 0$ és $x \geq y \geq z > 0$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{a^2x^2}{(by+cz)(bz+cy)} + \frac{b^2y^2}{(cz+ax)(cx+az)} + \frac{c^2z^2}{(ax+by)(ay+bx)} \geq \frac{3}{4}.$$

Ennek a megoldása mindjárt egy általam nem ismert, egyébként - mások által - jól ismert összefüggésre hivatkozott, a Nesbitt-egyenlőtlenségre. Aztán a megoldás a rendezési tétellel folytatódott, amit szintén nem ismertem korábbról. Foglalkozzunk először ezzel a két összefüggéssel.

A *Nesbitt-egyenlőtlenség* a következőt takarja: tetszőleges a, b, c pozitív valós számokra érvényes az alábbi összefüggés:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2},$$

s egyenlőség pontosan az $a = b = c$ esetben áll fenn.

Ennek az egyik *bizonyítása* a számtani és harmonikus közepek közti reláción alapul (ezentúl a harmonikus, mértani és számtani közepek közötti összefüggésre röviden $H \leq G \leq A$-val fogunk hivatkozni). Induljunk ki a felírt formulából, s ekvivalens lépésekkel alakítsuk át a következők szerint:

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}\quad\Leftrightarrow\\
\Leftrightarrow\quad&\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{b+c+a}{c+a}+\frac{c+a+b}{a+b}-3\ge\frac{3}{2}\quad\Leftrightarrow\\
\Leftrightarrow\quad&(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)\ge\frac{9}{2}\quad\Leftrightarrow\\
\Leftrightarrow\quad&((a+b)+(b+c)+(c+a))\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)\ge 9\quad\Leftrightarrow\\
\Leftrightarrow\quad&\frac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{3}\ge\frac{1}{\frac{\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}}{3}},
\end{aligned}$$

ami $A\ge H$ miatt igaz. „=” $\Leftrightarrow a+b=b+c=c+a\Leftrightarrow a=b=c$. ■

Jelen dolgozatban mind a bizonyítások, mind pedig a feladatok megoldásainak a végét a „ ■ ” szimbólummal fogjuk jelölni.

A *rendezési tételt* legegyszerűbben a következőképpen tudjuk megfogalmazni: tekintsük az $a_1\le a_2\le\ldots\le a_n$ és a $b_1\le b_2\le\ldots\le b_n$ valós számokat, és legyen σ az $\{1,2,\ldots,n\}$ halmaz egy permutációja. Ekkor érvényes az alábbi összefüggés:

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\ge\sum_{i=1}^{n}a_ib_{\sigma(i)}\ge\sum_{i=1}^{n}a_ib_{n-i+1}\,,$$

s egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha teljesül, hogy $a_1=a_2=\ldots=a_n$ vagy $b_1=b_2=\ldots=b_n$.

Bizonyítás. Az első egyenlőtlenséget látjuk be először. n szerinti teljes indukcióval okoskodunk. Ha $n=1$, akkor az állítás automatikusan teljesül, nincs mit bizonyítani. Tegyük fel ezek után, hogy teljesül tetszőleges k pozitív egész számra, azaz

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_kb_k\ge a_1b_{\sigma(1)}+a_2b_{\sigma(2)}+\ldots+a_kb_{\sigma(k)}.$$

Azt fogjuk megmutatni, hogy

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_kb_k+a_{k+1}b_{k+1}\ge a_1b_{\sigma(1)}+a_2b_{\sigma(2)}+\ldots+a_kb_{\sigma(k)}+a_{k+1}b_{\sigma(k+1)}.$$

Legyen m az a pozitív egész szám, melyre $\sigma(m) = k+1$. Ekkor mivel egyrészt $a_{k+1} \geq a_m$, másrészt $b_{k+1} \geq b_{\sigma(k+1)}$, így

$$\begin{aligned} 0 &\leq (a_{k+1} - a_m)\left(b_{k+1} - b_{\sigma(k+1)}\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a_m b_{k+1} + a_{k+1} b_{\sigma(k+1)} \leq a_m b_{\sigma(k+1)} + a_{k+1} b_{k+1}\,. \end{aligned}$$

Ezáltal:

$$\begin{aligned} & a_1 b_{\sigma(1)} + \ldots + a_m b_{\sigma(m)} + \ldots + a_{k+1} b_{\sigma(k+1)} = \\ = \; & a_1 b_{\sigma(1)} + \ldots + a_m b_{k+1} + \ldots + a_{k+1} b_{\sigma(k+1)} \leq \\ \leq \; & a_1 b_{\sigma(1)} + \ldots + a_m b_{\sigma(k+1)} + \ldots + a_{k+1} b_{k+1}\,, \end{aligned}$$

ahonnan az indukciós feltétel miatt adódik az állítás.

A másik egyenlőtlenséget az első segítségével bizonyítjuk. Ehhez vegyük alapul az $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ és a $-b_n \leq -b_{n-1} \leq \ldots \leq -b_1$ valós számokat, és alkalmazzuk rájuk az imént belátott egyenlőtlenséget:

$$a_1(-b_n)+a_2(-b_{n-1})+\ldots+a_n(-b_1) \geq a_1(-b_{\sigma(1)})+a_2(-b_{\sigma(2)})+\ldots+a_n(-b_{\sigma(n)}),$$

amit átrendezve a kívánt összefüggéshez jutunk.
Az egyenlőség feltétele kiolvasható a bizonyítás menetéből. ■

Van olyan forrás, amely a tételt Gyires Bélának és Szűcs Adolfnak tulajdonítja, de van olyan is, mely pusztán Szűcs Adolf tételeként említi. Ábrahám Gábor Nevezetes egyenlőtlenségek című könyvében sok szép egyenlőtlenség között a rendezési tétel is megtalálható, s kapunk rá több alkalmazást is.

Nézzünk rá mi is két feladatot, melyek közül az elsőt 2011-ben a Nemzetközi Magyar Matematikaversenyen tűzték ki (10. osztály, 1. feladat, Kántor Sándorné feladata).

1. feladat. Mutassuk meg, hogy ha a, b, c egy háromszög három oldala, akkor

$$3 \leq \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} < 4\,.$$

Megoldás. Nézzük először az első egyenlőtlenséget:

$$3 \leq \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}\,.$$

Ezt ekvivalens átalakításokkal a következő alakra hozhatjuk:

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca,$$

ami rögtön adódik, ha a rendezési tételt alkalmazzuk az (a, b, c) és az (a, b, c) számhármasokra (másképp okoskodva: 2-vel szorozva az egyenlőtlenséget, majd teljes négyzeteket kialakítva a következő alakot kapjuk:

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0,$$

amivel szintén bebizonyítottuk az állítást). „=” $\Leftrightarrow a = b = c$.
A második egyenlőtlenség ekvivalens lépéseket végezve az alábbi formába önthető:

$$a^2 + b^2 + c^2 < a(b+c) + b(c+a) + c(a+b),$$

ami a háromszög-egyenlőtlenség miatt teljesül. ■

Láthatjuk, hogy az első egyenlőtlenség általános érvényű, nem használtuk fel ugyanis a bizonyításában, hogy háromszög oldalairól van szó. A későbbiekben többször is alkalmazni fogjuk ezt az összefüggést, $(*)$-gal hivatkozunk majd rá:

$$3 \leq \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}. \tag{$*$}$$

2. feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c pozitív valós számok, akkor teljesül az alábbi összefüggés:

$$\frac{a^2+bc}{b+c} + \frac{b^2+ca}{c+a} + \frac{c^2+ab}{a+b} \geq a+b+c\,.$$

(Cristinel Mortici, Gazeta Matematica)

Megoldás. Világos, hogy az (a^2, b^2, c^2) és az $\left(\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}\right)$ számhármasok azonosan rendezettek, ami alatt értjük azt, hogy mindkettőben pontosan ugyanaz a nagyságrendi viszony a megfelelő tagok között. Így a rendezési tétel értelmében:

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a^2}{c+a} + \frac{b^2}{a+b} + \frac{c^2}{b+c}\,.$$

Adjunk mindkét oldalhoz $\left(\frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} + \frac{ab}{a+b}\right)$-t:

$$\frac{a^2+bc}{b+c} + \frac{b^2+ca}{c+a} + \frac{c^2+ab}{a+b} \geq \frac{a^2+ca}{c+a} + \frac{b^2+ab}{a+b} + \frac{c^2+bc}{b+c}\,.$$

Mivel a jobb oldalon egyszerűsítés után $a+b+c$ jelenik meg, így állításunkat be is láttuk. Az is világos, hogy „=” $\Leftrightarrow a = b = c$. ■

A Nesbitt-egyenlőtlenség a rendezési tétel segítségével is könnyen igazolható, ugyanis az közös nevezőre hozás és pár ekvivalens lépés után a következő alakot ölti:

$$2\left(a^3+b^3+c^3\right) \geq a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2.$$

Ez pedig igaz, hiszen ha a rendezési tételt alkalmazzuk az (a^2, b^2, c^2), illetve az (a, b, c) hármasokra, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} a^3+b^3+c^3 &\geq a^2b+b^2c+c^2a\,, \\ a^3+b^3+c^3 &\geq a^2c+b^2a+c^2b\,, \end{aligned}$$

amiket már csak össze kell adnunk, és készen is vagyunk. Innen az is adódik persze, hogy „=” $\Leftrightarrow a = b = c$. ■

Megjegyezzük, hogy a Nesbitt-egyenlőtlenséget más úton is bizonyíthatjuk a rendezési tétel segítségével. Akit érdekel ez a bizonyítás és a Nesbitt-egyenlőtlenség több más szép bizonyítása, akkor az utánanézhet ezeknek Róka Sándor 2006-ban a nagykanizsai továbbképzésen elhangzott előadásának kivonatában, amely a Zalai Matematikai Tehetségekért Alapítvány gondozásában jelent meg (a kiadvány címe: Általános és középiskolai matematikai tehetséggondozás (2006. október 4-7.), az előadás címe: Bizonyítások a Nesbitt-egyenlőtlenségre).

Ezen előkészületek után a szemináriumot motiváló feladat megoldása már nem is olyan bonyolult.

3. feladat. Az a, b, c, x, y, z valós számokra teljesül, hogy $a \geq b \geq c > 0$ és $x \geq y \geq z > 0$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{a^2x^2}{(by+cz)(bz+cy)} + \frac{b^2y^2}{(cz+ax)(cx+az)} + \frac{c^2z^2}{(ax+by)(ay+bx)} \geq \frac{3}{4}\,.$$

Megoldás. A rendezési tétel segítségével először is végezzünk becslést a nevezőkre vonatkozóan (a változók között fennálló nagyságrendi viszony egyébként sugallja a rendezési tétel használatát):

$$\begin{aligned} bz+cy \leq by+cz &\quad\Rightarrow\quad (by+cz)(bz+cy) \leq (by+cz)^2, \\ cx+az \leq cz+ax &\quad\Rightarrow\quad (cz+ax)(cx+az) \leq (cz+ax)^2, \\ ay+bx \leq ax+by &\quad\Rightarrow\quad (ax+by)(ay+bx) \leq (ax+by)^2. \end{aligned}$$

(„=” $\Leftrightarrow a = b = c$ vagy $x = y = z$). Így az egyenlőtlenség bal oldala (innentől kezdve minden feladatban röviden: BO) alulról becsülhető:

$$BO \geq \frac{a^2x^2}{(by+cz)^2} + \frac{b^2y^2}{(cz+ax)^2} + \frac{c^2z^2}{(ax+by)^2}\,.$$

Mivel

$$\begin{aligned} 0 &\leq (by-cz)^2 &\Leftrightarrow\quad (by+cz)^2 &\leq 2\left(b^2y^2+c^2z^2\right), \\ 0 &\leq (cz-ax)^2 &\Leftrightarrow\quad (cz+ax)^2 &\leq 2\left(c^2z^2+a^2x^2\right), \\ 0 &\leq (ax-by)^2 &\Leftrightarrow\quad (ax+by)^2 &\leq 2\left(a^2x^2+b^2y^2\right), \end{aligned}$$

így a becslés tovább folytatható:

$$BO \geq \frac{a^2x^2}{2\left(b^2y^2+c^2z^2\right)} + \frac{b^2y^2}{2\left(c^2z^2+a^2x^2\right)} + \frac{c^2z^2}{2\left(a^2x^2+b^2y^2\right)}\,.$$

Elegendő tehát azt belátnunk, hogy

$$\frac{a^2x^2}{2\left(b^2y^2+c^2z^2\right)} + \frac{b^2y^2}{2\left(c^2z^2+a^2x^2\right)} + \frac{c^2z^2}{2\left(a^2x^2+b^2y^2\right)} \geq \frac{3}{4}\,.$$

Ez pedig a Nesbitt-egyenlőtlenségből közvetlenül adódik, s így készen is vagyunk. ■

Aztán ahogy egyre több feladatot láttam, gyűltek a (mások által már) „jól ismert” összefüggések. Ilyen volt az úgynevezett *Titu-lemma*, amiről Kiss Géza tartott előadást 2010-ben Komáromban a Nagy Károly Matematikai Diáktalálkozón. A lemma Titu Andreescu nevéhez kötődik (az amerikai olimpiai csapat felkészítője), de több szakirodalom Bergström-egyenlőtlenségként említi, hiszen Bergström 1949-ben az összefüggést már publikálta (Harald Bergström, svéd matematikus). Mivel hazánkban a Titu-lemma elnevezés honosodott meg, így én is így fogom említeni, és a levezetésekben használni fogom a külföldi szakirodalom rá használatos rövidítését: T_2 (ejtsd: titu).

A Titu-lemma legegyszerűbb alakja a következő:

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b}\,,$$

ahol $a, b > 0$; $x, y \in \mathbb{R}$, és „=” $\Leftrightarrow \dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b}$. Általánosan:

$$\frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2} + \ldots + \frac{x_n^2}{a_n} \geq \frac{(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2}{a_1+a_2+\ldots+a_n}\,, \tag{T_2}$$

ahol $a_1, a_2, \ldots a_n > 0$; $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, és „=” $\Leftrightarrow \dfrac{x_1}{a_1} = \dfrac{x_2}{a_2} = \ldots = \dfrac{x_n}{a_n}$.

Ugyan az állítás közvetlenül adódik a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz-egyenlőtlenségből, mégis kiemelt fontosságúnak gondolom, hiszen sok feladatban annál sokkal könnyebb a használata. Nézzük meg a *bizonyítást* most másképp, teljes indukcióval:

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b} \Leftrightarrow (xb - ya)^2 \geq 0\,,$$

és „=” $\Leftrightarrow xb = ya \Leftrightarrow \dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b}$, vagyis teljesül az állítás.
Tegyük fel ezek után, hogy érvényes az egyenlőtlenség, ha annak bal oldalán k darab tört szerepel, azaz:

$$\frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2} + \ldots + \frac{x_k^2}{a_k} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^2}{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}\,,$$

és „=” $\Leftrightarrow \dfrac{x_1}{a_1} = \dfrac{x_2}{a_2} = \ldots = \dfrac{x_k}{a_k}$. Mutassuk meg ezek után $(k+1)$-re:

$$\begin{aligned}\frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2} + \ldots + \frac{x_k^2}{a_k} + \frac{x_{k+1}^2}{a_{k+1}} &\geq \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^2}{a_1 + a_2 + \ldots + a_k} + \frac{x_{k+1}^2}{a_{k+1}} \geq \\ &\geq \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_{k+1})^2}{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k+1}}\,;\end{aligned}$$

az első egyenlőtlenségnél az indukciós lépést, a másodikban pedig az $n = 2$ esetet használtuk fel.

$$\text{„=”} \Leftrightarrow \frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \ldots = \frac{x_k}{a_k} \quad \text{és} \quad \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_k}{a_1 + a_2 + \ldots + a_k} = \frac{x_{k+1}}{a_{k+1}}\,,$$

s így

$$\frac{x_{k+1}}{a_{k+1}} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_k}{a_1 + a_2 + \ldots + a_k} = \frac{x_1 + x_1 \cdot \dfrac{a_2}{a_1} + \ldots + x_1 \cdot \dfrac{a_k}{a_1}}{a_1 + a_2 + \ldots + a_k} = \frac{x_1}{a_1}\,,$$

amivel az állítást beláttuk. ■

A Titu-lemma segítségével a Nesbitt-egyenlőtlenség pillanatok alatt belátható:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{a^2}{a(b+c)} + \frac{b^2}{b(c+a)} + \frac{c^2}{c(a+b)} \overset{T_2}{\geq} \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} \overset{(*)}{\geq} \frac{3}{2}\,,$$

„=” $\Leftrightarrow a = b = c$. ■

Ezek után a Titu-lemma alkalmazásai következnek. Először is nézzük meg a Nesbitt-egyenlőtlenség pár lehetséges általánosítását a lemmával bizonyítva azokat.

4. feladat. Mutassuk meg, hogy tetszőleges a, b, c, d, e pozitív valós számokra teljesül, hogy

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+e}+\frac{d}{e+a}+\frac{e}{a+b} \geq \frac{5}{2}.$$

Megoldás. Mivel

$$\begin{aligned} BO &= \frac{a^2}{a(b+c)}+\frac{b^2}{b(c+d)}+\frac{c^2}{c(d+e)}+\frac{d^2}{d(e+a)}+\frac{e^2}{e(a+b)} \overset{T_2}{\geq} \\ &\geq \frac{(a+b+c+d+e)^2}{ab+ac+bc+bd+cd+ce+de+da+ea+eb}, \end{aligned}$$

így elegendő megmutatnunk, hogy

$$\frac{(a+b+c+d+e)^2}{ab+ac+bc+bd+cd+ce+de+da+ea+eb} \geq \frac{5}{2}.$$

Ez pedig igaz, hiszen ekvivalens átalakításokkal a következő alakra hozható:

$$\begin{gathered} (a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(a-e)^2+(b-c)^2+ \\ +(b-d)^2+(b-e)^2+(c-d)^2+(c-e)^2+(d-e)^2 \geq 0. \end{gathered}$$

„=” $\Leftrightarrow a=b=c=d=e.$ ■

Harold S. Shapiro 1954-ben vetette fel, hogy igaz-e teljes általánosságban az előző állítás, azaz hogy vajon érvényes-e tetszőleges $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív valós számokra az alábbi összefüggés:

$$\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+\ldots+\frac{a_n}{a_1+a_2} \geq \frac{n}{2}.$$

A kérdés nagyon nehéz problémának minősült, és a válasz elég meglepő volt. Az egyenlőtlenség páros n-re csak 12-ig, páratlanra 23-ig igaz. Ha ellenben gyengítünk rajta, és a jobb oldalra $\frac{n}{3}$-at írunk, akkor már teljesül minden pozitív egész n-re.

Az alábbi módon is általánosíthatjuk a Nesbitt-egyenlőtlenséget:

5. feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges a, b, c, x, y pozitív valós számokra érvényes az alábbi összefüggés:

$$\frac{a}{xb+yc}+\frac{b}{xc+ya}+\frac{c}{xa+yb} \geq \frac{3}{x+y}.$$

Megoldás.

$$\begin{aligned} BO &= \frac{a^2}{a(xb+yc)}+\frac{b^2}{b(xc+ya)}+\frac{c^2}{c(xa+yb)} \overset{T_2}{\geq} \\ &\geq \frac{(a+b+c)^2}{abx+acy+bcx+bay+cax+cby} = \frac{(a+b+c)^2}{(x+y)(ab+bc+ca)} \overset{(*)}{\geq} \\ &\geq \frac{3}{x+y}, \end{aligned}$$

és ahogy azt már láttuk, „=” $\Leftrightarrow a=b=c$. ■

Kézenfekvő a következő általánosítás is:

6. feladat. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív valós számokra teljesül, hogy

$$\frac{a_1}{S-a_1}+\frac{a_2}{S-a_2}+\ldots+\frac{a_n}{S-a_n} \geq \frac{n}{n-1},$$

ahol $S=a_1+a_2+\ldots+a_n$ $(n \geq 2)$.

Megoldás. Mivel

$$\begin{aligned} BO &= \frac{a_1^2}{a_1(S-a_1)}+\frac{a_2^2}{a_2(S-a_2)}+\ldots+\frac{a_n^2}{a_n(S-a_n)} \overset{T_2}{\geq} \\ &\geq \frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{a_1S-a_1^2+a_2S-a_2^2+\ldots+a_nS-a_n^2} = \\ &= \frac{S^2}{S(a_1+a_2+\ldots+a_n)-(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)} = \\ &= \frac{S^2}{S^2-(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)}, \end{aligned}$$

így elegendő megmutatnunk, hogy

$$\frac{S^2}{S^2-(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)} \geq \frac{n}{n-1}.$$

Ez pedig átalakítások után ekvivalens azzal, hogy

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2 \geq \frac{S^2}{n}.$$

Ennek igazolása a Titu-lemmával könnyen megy:

$$\frac{S^2}{n} = \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2}{1 + 1 + \ldots + 1} \overset{T_2}{\leq} \frac{a_1^2}{1} + \frac{a_2^2}{1} + \ldots + \frac{a_n^2}{1} = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2.$$

Az is azonnal adódik, hogy „=” $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. ■

A következő feladatok zömét idegen nyelven leltem fel az interneten. Hogy ezek a feladatok eredetileg kitől, honnan származnak, az internetes források alapján adtam meg.

7. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha az a, b, c, d pozitív valós számokra fennáll, hogy $a + b + c + d = 1$, akkor teljesül az alábbi összefüggés:

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+d} + \frac{d^2}{d+a} \geq \frac{1}{2}.$$

(ír versenyfeladat, 1999)

Megoldás.

$$BO \overset{T_2}{\geq} \frac{(a+b+c+d)^2}{2(a+b+c+d)} \overset{\text{feltétel}}{=} \frac{1}{2}.$$

„=” $\Leftrightarrow \dfrac{a}{a+b} = \dfrac{b}{b+c} = \dfrac{c}{c+d} = \dfrac{d}{d+a}$, ahonnan rövid számolás után adódik, hogy $a = b = c = d \overset{\text{feltétel}}{=} \dfrac{1}{4}$. ■

8. feladat. Mutassuk meg, hogy tetszőleges a, b, c pozitív valós számokra igaz az alábbi egyenlőtlenség:

$$\frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} \geq \frac{9}{a+b+c}.$$

Megoldás.

$$BO = \frac{2^2}{2(a+b)} + \frac{2^2}{2(b+c)} + \frac{2^2}{2(c+a)} \overset{T_2}{\geq} \frac{(2+2+2)^2}{4(a+b+c)} = \frac{9}{a+b+c}.$$

„=” $\Leftrightarrow \dfrac{2}{2(a+b)} = \dfrac{2}{2(b+c)} = \dfrac{2}{2(c+a)} \Leftrightarrow a = b = c.$ ■

9. feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges a, b, c pozitív valós számokra érvényes a következő összefüggés:

$$\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a} \geq a + b + c.$$

Megoldás.

$$\begin{aligned} BO &= \frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}+\frac{a^2}{c+a} \overset{T_2}{\geq} \\ &\geq \frac{(2(a+b+c))^2}{4(a+b+c)} = a+b+c. \end{aligned}$$

Gyorsan adódik az is, hogy „=” $\Leftrightarrow$ $a=b=c$. ■

10. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ és a $b_1, b_2, \ldots, b_n$ pozitív valós számok teljesítik az

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$$

feltételt, akkor az is igaz rájuk, hogy

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n}{b_n}.$$

(Romeo Ilie)

Megoldás.

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\ldots+\frac{a_n}{b_n} &= \frac{a_1^2}{a_1b_1}+\frac{a_2^2}{a_2b_2}+\ldots+\frac{a_n^2}{a_nb_n} \overset{T_2}{\geq} \\ &\geq \frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n} \overset{\text{feltétel}}{\geq} \\ &\geq \frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{a_1+a_2+\ldots+a_n} = \\ &= a_1+a_2+\ldots+a_n. \end{aligned}$$

■

11. feladat. Mutassuk meg, hogy ha az a, b, c pozitív valós számokra teljesül, hogy $a+b+c=1$, akkor:

$$\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ca}+\frac{c}{1+ab} \geq \frac{9}{10}.$$

(indiai versenyfeladat)

Megoldás.

$$\begin{aligned} BO &= \frac{a^2}{a(1+bc)}+\frac{b^2}{b(1+ca)}+\frac{c^2}{c(1+ab)} \overset{T_2}{\geq} \frac{(a+b+c)^2}{a+b+c+3abc} \overset{\text{feltétel}}{=} \\ &= \frac{1}{1+3abc} \overset{A\geq G}{\geq} \frac{1}{1+3\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3} \overset{\text{feltétel}}{=} \frac{1}{1+3\cdot\frac{1}{27}} = \frac{9}{10}. \end{aligned}$$

Közvetlenül adódik, hogy „=” $\Leftrightarrow a = b = c \overset{\text{feltétel}}{=} \dfrac{1}{3}$. ■

12. feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges a, b, c pozitív valós számokra igaz a következő összefüggés:

$$\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \geq 1.$$

(cseh-szlovák versenyfeladat, 1999)

1. megoldás.

$$BO = \frac{a^2}{a(b+2c)} + \frac{b^2}{b(c+2a)} + \frac{c^2}{c(a+2b)} \overset{T_2}{\geq} \frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)} \overset{(*)}{\geq} 1.$$

Az is világos, hogy „=” $\Leftrightarrow a = b = c$. ■

2. megoldás. Közvetlenül adódik az 5. feladat eredményéből. ■

13. feladat. Bizonyítsuk be, hogy minden a, b, c pozitív valós szám esetén érvényes az alábbi egyenlőtlenség:

$$\frac{a^2}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^2}{(b+c)(b+a)} + \frac{c^2}{(c+a)(c+b)} \geq \frac{3}{4}.$$

Megoldás. Mivel

$$BO \overset{T_2}{\geq} \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)},$$

így elegendő belátnunk, hogy

$$\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)} \geq \frac{3}{4}.$$

Ez pedig teljesül, mivel néhány ekvivalens lépésben a már bebizonyított $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ összefüggésre hozható. Ebből az is adódik, hogy ,=” $\Leftrightarrow a = b = c$. ■

A következő feladatot Mészáros Józseftől hallottam a korábban említett 2010-es Nagy Károly Matematikai Diáktalálkozón, s nagyon jó rávezető példa az 1995-ös Nemzetközi Matematikai Diákolimpia (IMO) 2-es feladatára, amit utána meg is nézünk.

14. feladat. Tegyük fel, hogy az a, b, c pozitív valós számokra teljesül, hogy $abc = 1$. Mutassuk meg, hogy ekkor érvényes a

$$\frac{2}{a^3(b+c)} + \frac{2}{b^3(c+a)} + \frac{2}{c^3(a+b)} \geq ab + bc + ca$$

egyenlőtlenség.

Megoldás.

$$\begin{aligned} BO &= 2\left(\frac{\frac{1}{a^2}}{a(b+c)} + \frac{\frac{1}{b^2}}{b(c+a)} + \frac{\frac{1}{c^2}}{c(a+b)}\right) \overset{T_2}{\geq} \\ &\geq 2 \cdot \frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}{2(ab+bc+ca)} = \frac{\left(\frac{ab+bc+ca}{abc}\right)^2}{ab+bc+ca} \overset{\text{feltétel}}{=} ab + bc + ca. \end{aligned}$$

„=” $\Leftrightarrow \dfrac{1}{a^2(b+c)} = \dfrac{1}{b^2(c+a)} = \dfrac{1}{c^2(a+b)}$. Itt például az első egyenlőségből az adódik, hogy $a^2b + a^2c = b^2c + b^2a$, amit átrendezve és szorzattá alakítva a következő formába önthetünk:

$$(a-b)\,(ab + c\,(a+b)) = 0.$$

Figyelembe véve, hogy minden változó pozitív a feltétel szerint, így ez pontosan akkor teljesül, ha $a = b$. Hasonlóan kapjuk, hogy $b = c$, azaz egyenlőség akkor és csakis akkor áll fenn a feladatban, ha $a = b = c \overset{\text{feltétel}}{=} 1$. ■

15. feladat. Mutassuk meg, hogy ha a pozitív valós a, b, c számokra teljesül az $abc = 1$ feltétel, akkor az is igaz rájuk, hogy:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

(IMO, 1995, 2. feladat)

Megoldás. Az előző feladatban láttuk, hogy

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{ab+bc+ca}{2},$$

így elegendő belátnunk, hogy

$$ab + bc + ca \geq 3,$$

ami ekvivalens azzal, hogy

$$\frac{ab+bc+ca}{3} \geq 1.$$

Ez viszont igaz, hiszen

$$\frac{ab+bc+ca}{3} \overset{A\geq G}{\geq} \sqrt[3]{(abc)^2} \overset{\text{feltétel}}{=} 1.$$

Az is közvetlenül adódik az előző feladatból, hogy „=” $\Leftrightarrow$ $a=b=c=1$. ■

A következő példa az egyenlőségvizsgálat fontosságára hívja fel a figyelmet.

16. feladat. Igazoljuk, hogy minden a, b pozitív valós számra teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

$$\frac{18}{(a+b)^4} \leq \frac{2}{(a-b)^4} + \frac{1}{a^3b+b^3a}.$$

Megoldás. Könnyen ellenőrizhető módon:

$$(a+b)^4 = (a-b)^4 + 8\left(a^3b+b^3a\right).$$

Ezt felhasználva:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{(a-b)^4} + \frac{1}{a^3b+b^3a} &= \frac{2}{(a-b)^4} + \frac{8}{8\left(a^3b+b^3a\right)} = \\
&= 2\left(\frac{1^2}{(a-b)^4} + \frac{2^2}{8\left(a^3b+b^3a\right)}\right) \overset{T_2}{\geq} 2\cdot\frac{(1+2)^2}{(a+b)^4} = \\
&= \frac{18}{(a+b)^4}.
\end{aligned}$$

Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(a-b)^4} = \frac{2}{8(a^3b+b^3a)} \quad &\Leftrightarrow \quad 8(a^3b+b^3a) = 2(a-b)^4 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad (a+b)^4 - (a-b)^4 = 2(a-b)^4 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad (a+b)^4 = 3(a-b)^4 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad |a+b| = \sqrt[4]{3}\,|a-b|.
\end{aligned}$$

Ha ezt az egyenletet megoldjuk, akkor $a > b$ esetén azt kapjuk, hogy

$$a = \frac{1+\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{3}-1}\,b,$$

ha pedig $a < b$, akkor azt, hogy

$$a = \frac{\sqrt[4]{3}-1}{\sqrt[4]{3}+1}\, b.$$

Az $a = b$ eset eleve kizárt, így a feladat megoldásának végére értünk. ■

17. feladat. Bizonyítsuk be, hogy az $abc = 1$ feltételt teljesítő a, b, c pozitív valós számokra teljesül az alábbi összefüggés:

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} \geq 1.$$

(Vasile Cartoaje, Gazeta Matematica)

Megoldás. Bevezetve a $d := a + b + c + 1$ jelölést állításunk új alakja a következő lesz:

$$\frac{d-(b+c+1)}{b+c+1} + \frac{d-(c+a+1)}{c+a+1} + \frac{d-(a+b+1)}{a+b+1} \geq 1,$$

ami ekvivalens az alábbival:

$$\frac{d}{d-a} + \frac{d}{d-b} + \frac{d}{d-c} \geq 4.$$

Ennek belátása pedig a Titu-lemmával nem bonyolult feladat:

$$\begin{aligned} BO &= \frac{d^2}{d(d-a)} + \frac{d^2}{d(d-b)} + \frac{d^2}{d(d-c)} \overset{T_2}{\geq} \frac{(3d)^2}{3d^2 - d(a+b+c)} = \\ &= \frac{(3d)^2}{3d^2 - d(d-1)} = \frac{9d^2}{2d^2+d} = \frac{9d}{2d+1} \geq 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad d \geq 4 \Leftrightarrow a+b+c \geq 3 \;\Leftrightarrow\; \frac{a+b+c}{3} \geq 1, \end{aligned}$$

ami igaz, hiszen

$$1 \overset{\text{feltétel}}{=} \sqrt[3]{abc} \overset{A \geq G}{\leq} \frac{a+b+c}{3}.$$

Az is világos, hogy „=” $\Leftrightarrow a = b = c \overset{\text{feltétel}}{=} 1$. ■

18. feladat. Vegyük alapul a, b, c pozitív valós számokat, melyek kielégítik az $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$ feltételt. Mutassuk meg, hogy ekkor teljesül rájuk a következő összefüggés is:

$$\frac{a}{b^2c^2} + \frac{b}{c^2a^2} + \frac{c}{a^2b^2} \geq \frac{9}{a+b+c}.$$

Megoldás. Hozzunk közös nevezőre a bal oldalon, majd alkalmazzuk a Titu-lemmát:

$$\begin{aligned} BO &= \frac{a^3}{a^2b^2c^2}+\frac{b^3}{a^2b^2c^2}+\frac{c^3}{a^2b^2c^2}=\frac{a^4}{a\left(a^2b^2c^2\right)}+\frac{b^4}{b\left(a^2b^2c^2\right)}+\frac{c^4}{c\left(a^2b^2c^2\right)}\overset{T_2}{\geq} \\ &\geq \frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{(abc)^2(a+b+c)}\overset{\text{feltétel}}{=}\frac{(3abc)^2}{(abc)^2(a+b+c)}=\frac{9}{a+b+c}\,. \end{aligned}$$

Továbbá „=” $\Leftrightarrow \dfrac{a^2}{a\left(a^2b^2c^2\right)}=\dfrac{b^2}{b\left(a^2b^2c^2\right)}=\dfrac{c^2}{c\left(a^2b^2c^2\right)}\Leftrightarrow a=b=c\overset{\text{feltétel}}{=}1.$ ■

Az alábbi példa feladatjavaslat volt az 1993-as Nemzetközi Matematikai Diákolimpiára, végül nem tűzték ki.

19. feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges a, b, c, d pozitív valós számokra fennáll az alábbi egyenlőtlenség:

$$\frac{a}{b+2c+3d}+\frac{b}{c+2d+3a}+\frac{c}{d+2a+3b}+\frac{d}{a+2b+3c}\geq\frac{2}{3}\,.$$

(Titu Andreescu, IMO, 1993, Shortlist)

Megoldás. Mivel

$$\begin{aligned} & BO= \\ &= \frac{a^2}{a(b+2c+3d)}+\frac{b^2}{b(c+2d+3a)}+\frac{c^2}{c(d+2a+3b)}+\frac{d^2}{d(a+2b+3c)}\overset{T_2}{\geq} \\ &\geq \frac{(a+b+c+d)^2}{4(ab+ac+ad+bc+bd+cd)}\,, \end{aligned}$$

így elegendő megmutatnunk, hogy

$$\frac{(a+b+c+d)^2}{4(ab+ac+ad+bc+bd+cd)}\geq\frac{2}{3}\,.$$

Mivel ez pár lépéses rendezés után ekvivalens azzal, hogy

$$(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2\geq 0,$$

így az állítást beláttuk. Az is látható, hogy „=” $\Leftrightarrow a=b=c=d.$ ■

A következő két feladatban egy „jól ismert” polinom tűnik fel, nevezetesen az $x^3+y^3+z^3-3xyz$ polinom. Ennek egy igen lényeges tulajdonsága, hogy faktorizálható az alábbi módon, amit a megoldásokban erősen felhasználunk:

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right).$$

Érdekességképpen megjegyezzük, hogy Pelikán József múlt tanévi (2012-2013) olimpiai szakkörén (ami fellelhető az egyik legnépszerűbb videómegosztón az interneten) kiemelten foglalkozott ezzel a polinommal, s megmutatta, hogy minden 3-nál nagyobb prímszám lényegében egyértelműen előállítható ilyen alakban.

20. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha az a, b, c pozitív valós számok teljesítik az $ab + bc + ca = \frac{1}{3}$ feltételt, akkor érvényes rájuk az alábbi egyenlőtlenség:

$$\frac{a}{a^2 - bc + 1} + \frac{b}{b^2 - ca + 1} + \frac{c}{c^2 - ab + 1} \geq \frac{1}{a + b + c}.$$

Megoldás.

$$\begin{aligned}
BO &= \frac{a^2}{a\left(a^2 - bc + 1\right)} + \frac{b^2}{b\left(b^2 - ca + 1\right)} + \frac{c^2}{c\left(c^2 - ab + 1\right)} \overset{T_2}{\geq} \\
&\geq \frac{(a+b+c)^2}{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc + (a+b+c)} = \\
&= \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)\left(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca\right) + (a+b+c)} = \\
&= \frac{a+b+c}{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca + 1} \overset{\text{feltétel}}{=} \\
&= \frac{a+b+c}{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca + 3(ab + bc + ca)} = \\
&= \frac{a+b+c}{a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)} = \frac{a+b+c}{(a+b+c)^2} = \\
&= \frac{1}{a+b+c}.
\end{aligned}$$

„=” $\Leftrightarrow \frac{a}{a(a^2 - bc + 1)} = \frac{b}{b(b^2 - ca + 1)} = \frac{c}{c(c^2 - ab + 1)}$. Ha tekintjük például az első egyenlőséget, akkor abból az adódik, hogy $a^2 - bc + 1 = b^2 - ca + 1$, amit átrendezve és szorzattá alakítva az $(a - b)(a + b + c) = 0$ alakra hozhatunk. Tekintettel arra, hogy a feltétel értelmében minden változó pozitív, ez pontosan akkor teljesül, ha $a = b$. Teljesen hasonlóan kapjuk, hogy $b = c$, azaz az egyenlőség pontosan akkor áll fenn a feladatban, ha $a = b = c \overset{\text{feltétel}}{=} \frac{1}{3}$. ∎

21. feladat. Mutassuk meg, hogy tetszőleges a, b, c pozitív valós számra fennáll az alábbi egyenlőtlenség:

$$\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + ca + a^2} \geq \frac{a+b+c}{3}.$$

(Tournament of the Towns, 1998)

Megoldás. Mivel

$$\begin{aligned}
BO &= \frac{a^4}{a\,(a^2+ab+b^2)}+\frac{b^4}{b\,(b^2+bc+c^2)}+\frac{c^4}{c\,(c^2+ca+a^2)} \overset{T_2}{\geq} \\
&\geq \frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a^3+b^3+c^3+ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)} = \\
&= \frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a^3+b^3+c^3-3abc+(a+b+c)(ab+bc+ca)} = \\
&= \frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)} = \frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c},
\end{aligned}$$

így elegendő azt belátnunk, hogy

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} \geq \frac{a+b+c}{3}.$$

Ez viszont igaz, hiszen pár ekvivalens lépés után az $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$ alakot kapjuk belőle, amit már beláttunk, s azt is, hogy „=” $\Leftrightarrow$ $a=b=c$. ■

A következő két feladat szintén Mészáros Jószef előadásán hangzott el.

22. feladat. Igazoljuk, hogy ha az a, b, c pozitív valós számokra teljesül, hogy $ab+bc+ca=3$, akkor érvényes rájuk az alábbi összefüggés is:

$$\frac{a}{b(r+c)}+\frac{b}{c(r+a)}+\frac{c}{a(r+b)} \geq \frac{3}{r+1},$$

ahol r tetszőleges pozitív valós szám.

Megoldás. Először is

$$\begin{aligned}
BO &= \frac{a^2}{ab(r+c)}+\frac{b^2}{bc(r+a)}+\frac{c^2}{ca(r+b)} \overset{T_2}{\geq} \frac{(a+b+c)^2}{r(ab+bc+ca)+3abc} \overset{\text{feltétel}}{=} \\
&= \frac{a^2+b^2+c^2+6}{3r+3abc} \overset{\text{rendezési tétel}}{\geq} \frac{ab+bc+ca+6}{3r+3abc} \overset{\text{feltétel}}{=} \frac{9}{3r+3abc} = \\
&= \frac{3}{r+abc}.
\end{aligned}$$

Másrészt a feltétel értelmében

$$1=\frac{ab+bc+ca}{3} \overset{A\geq G}{\geq} \sqrt[3]{(abc)^2},$$

így
$$BO \geq \frac{3}{r+1},$$
amit éppen állítottunk.
Közvetlenül adódik a korábbiakból, hogy „=” $\Leftrightarrow a = b = c \overset{\text{feltétel}}{=} 1$. ■

A következő feladat során használni fogjuk a Nesbitt-egyenlőtlenség egyik általánosítását (l. 5. feladat).

23. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $a, b, c > -1$ tetszőleges valós számok, akkor érvényes rájuk a következő összefüggés:
$$\frac{1+a^2}{1+b+c^2} + \frac{1+b^2}{1+c+a^2} + \frac{1+c^2}{1+a+b^2} \geq 2.$$

Megoldás. A feltétel garantálja, hogy mindhárom nevező pozitív legyen. Végezzünk először is becslést a nevezőkre vonatkozóan:
$$(1-a)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 2a + a^2 \geq 0 \Leftrightarrow a \leq \frac{1+a^2}{2},$$
s egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a = 1$. Hasonlóan adódik, hogy $b \leq \frac{1+b^2}{2}$, illetve $c \leq \frac{1+c^2}{2}$ (és „=” $\Leftrightarrow b = c = 1$). Ezt felhasználva kapjuk, hogy
$$BO \geq \frac{1+a^2}{1+\frac{1+b^2}{2}+c^2} + \frac{1+b^2}{1+\frac{1+c^2}{2}+a^2} + \frac{1+c^2}{1+\frac{1+a^2}{2}+b^2},$$
ahol kis átalakítás után a három tört a következő alakban írható fel:
$$2\left(\frac{1+a^2}{(1+b^2)+2(1+c^2)} + \frac{1+b^2}{(1+c^2)+2(1+a^2)} + \frac{1+c^2}{(1+a^2)+2(1+b^2)}\right).$$
Az 5. feladat értelmében a zárójeles kifejezés alulról becsülhető $\frac{3}{1+2} = 1$-gyel, s ezzel készen is vagyunk. „=” $\Leftrightarrow a = b = c = 1$. ■

A Titu-lemma alkalmazására nézzük meg végezetül a 2005-ös Nemzetközi Matematikai Diákolimpia 3-as feladatát. A már említett interneten fellelhető olimpiai szakkörön erre a feladatra két megoldást is kapunk. Az egyik megoldás a „hivatalos” megoldás, a másik pedig a moldáv Iurie Boreico megoldása, ami mind a hivatalosnál, mind az alábbi megoldásnál szellemesebb (különdíjat kapott érte, ez mindmáig az utolsó különdíj, amit kiosztottak).

24. feladat. Mutassuk meg, hogy minden x, y, z pozitív valós számra, melyekre teljesül, hogy $xyz \geq 1$, fennáll az alábbi összefüggés:

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{x^2 + y^5 + z^2} + \frac{z^5 - z^2}{x^2 + y^2 + z^5} \geq 0.$$

(IMO, 2005, 3. feladat)

Megoldás. Mivel

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} = \frac{(x^5 + y^2 + z^2) - (x^2 + y^2 + z^2)}{x^5 + y^2 + z^2} = 1 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^5 + y^2 + z^2}$$

(s hasonlóan a többi törtre is), kapjuk, hogy

$$BO = 3 - \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^5 + z^2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^5} \right).$$

Így a bizonyítandó egyenlőtlenség ekvivalens átfogalmazása a következő:

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^5 + z^2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^5} \leq 3.$$

Szorozzuk be mindkét oldalt $(x^2 + y^2 + z^2)$-tel:

$$\frac{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2}{x^2 + y^5 + z^2} + \frac{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2}{x^2 + y^2 + z^5} \leq 3\left(x^2 + y^2 + z^2\right).$$

Ennek bizonyításához használjuk a Titu-lemmát:

$$\frac{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2}{x^5 + y^2 + z^2} \overset{T_2}{\leq} \frac{\left(x^2\right)^2}{x^5} + \frac{\left(y^2\right)^2}{y^2} + \frac{\left(z^2\right)^2}{z^2} = \frac{1}{x} + y^2 + z^2.$$

Analóg módon kapjuk a másik két tört felső becslését:

$$\begin{aligned} \frac{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2}{x^2 + y^5 + z^2} &\leq x^2 + \frac{1}{y} + z^2, \\ \frac{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2}{x^2 + y^2 + z^5} &\leq x^2 + y^2 + \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

Adjuk össze a három egyenlőtlenség megfelelő oldalait:

$$\begin{aligned} \frac{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2}{x^5 + y^2 + z^2} &+ \frac{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2}{x^2 + y^5 + z^2} + \frac{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2}{x^2 + y^2 + z^5} \leq \\ &\leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + 2\left(x^2 + y^2 + z^2\right). \end{aligned}$$

Elegendő tehát belátnunk, hogy

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+2\left(x^2+y^2+z^2\right) \leq 3\left(x^2+y^2+z^2\right).$$

Ez már gyorsan kijön:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+2\left(x^2+y^2+z^2\right) \leq 3\left(x^2+y^2+z^2\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\ &\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \leq x^2+y^2+z^2 \Leftrightarrow \frac{xy+yz+zx}{xyz} \leq x^2+y^2+z^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\ &xy+yz+zx \leq xyz\left(x^2+y^2+z^2\right), \end{aligned}$$

ami igaz, hiszen a feltétel értelmében $xyz \geq 1$, a rendezési tétel miatt pedig - mint ahogy azt láttuk korábban - $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$.
Az is azonnal adódik, hogy „=" $\Leftrightarrow$ $xyz=1$, ami a feltétel tekintetbe vételével azt jelenti, hogy $x=y=z=1$. ■

Természetesen a Titu-lemmának létezik általánosabb formája is. Az viszont eléggé meglepő, hogy J. Radon (Johann Karl August Radon, osztrák matematikus) ezt egy 1913-as cikkében (*Über die absolut additiven Mengenfunktionen*, Wiener Sitzungsber **122** (1913), 1295 - 1438.) publikálta. Foglalkozzunk most ezzel az eredménnyel.

Tetszőleges $p>0$; $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$ és $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ valós számok esetén teljesül az alábbi összefüggés:

$$\frac{x_1^{p+1}}{a_1^p}+\ldots+\frac{x_n^{p+1}}{a_n^p} \geq \frac{(x_1+\ldots+x_n)^{p+1}}{(a_1+\ldots+a_n)^p}.$$

Világos, hogy innen $p=1$ választással visszakapjuk a Titu-lemmát. Azóta természetesen ezt a tételt is finomították, általánosították, még az utóbbi években is publikáltak e témakörben.

Tekintsünk egy alkalmazást a Radon-tételre. A következő feladatot a 2001-es Nemzetközi Matematikai Diákolimpián tűzték ki 2-es feladatként.

25. feladat. Igazoljuk, hogy

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1$$

minden a, b, c pozitív valós számra.
(IMO, 2001, 2. feladat)

Megoldás. Írjuk át a bal oldalt, majd alkalmazzuk rá a Radon-tételt:

$$\frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a^3+8abc}}+\frac{b^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{b^3+8abc}}+\frac{c^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{c^3+8abc}} \geq \frac{(a+b+c)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a^3+b^3+c^3+24abc}}.$$

Elegendő tehát annyit megmutatnunk, hogy

$$\frac{(a+b+c)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a^3+b^3+c^3+24abc}} \geq 1,$$

ami ekvivalens azzal, hogy

$$(a+b+c)^3 \geq a^3+b^3+c^3+24abc.$$

Innen pár lépésben a következő alakot kapjuk:

$$a\left(b^2+c^2\right)+b\left(c^2+a^2\right)+c\left(a^2+b^2\right) \geq 6abc,$$

amit ha (abc)-vel osztunk, akkor az alábbit kapjuk:

$$\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right) \geq 6.$$

Így viszont készen is vagyunk, hiszen egy pozitív számnak és reciprokának az összege minimum 2. Ebből az alakból közvetlenül kiolvasható az is, hogy egyenlőség pontosan az $a=b=c$ esetben áll fenn. ■

Ennek a feladatnak a magyarul fellelhető megoldása (Reiman István - Dobos Sándor: Nemzetközi Matematikai Diákolimpiák 1959-2003) ennél sokkal több furfangot igényel, hiszen nem használja a Radon-tételt.

Akkor vegyük át még egyszer. Titu-lemmának hívjuk azt az összefüggést, amit jóval korábban Bergström már leírt, s amit még korábban Radon általánosabb formában publikált...

Remélem, sikerült pár „jól ismert” összefüggést áttekintenünk, s volt köztük olyan is, amely azért az újdonság erejével hatott másnak is, nem csak számomra.