Megoldás-vázlatok, pontozás

2022/12

1. Valaki háromszor dobott egymás után egy klasszikus dobókockával. Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a három dobással dobott számok összege 14-nél nagyobb lesz!

M: Az összes lehetséges eset száma $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$. *(1 pont)*

A kedvező esetek száma, amikor 15, 16, 17 vagy 18 a dobott számok összege. (1 pont)

15 = 5 + 5 + 5 ; 1 eset

15 = 4 + 5 + 6 ; 3! = 6 eset

15 = 3 + 6 + 6 ; 3 eset

16 = 5 + 5 + 6 ; 3 eset

16 = 4 + 6 + 6 ; 3 eset

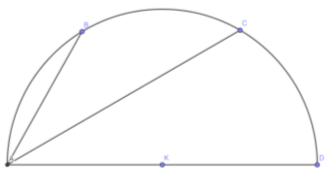
17 = 5 + 6 + 6 ; 3 eset

18 = 6 + 6 + 6 ; 1 eset.

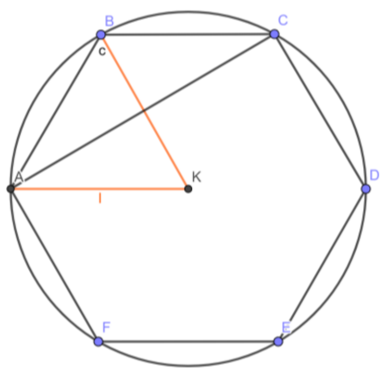
Ez összesen 20 eset (3 pont) így a keresett valószínűség $\frac{20}{216} = \frac{5}{54}$. *(1 pont)*

összesen 6 pont

2. Az ábrán látható félkör területe T. Az ABCD félkört a B és C pontok három egyenlő hosszú ívre bontják. Mennyi az ABC síkidom (az AB és AC szakaszok, ill.a BC körív által határolt rész) területe?



M: Legyen a (fél)kör középpontja K. Tükrözzük B-t és C-t K-ra, kapjuk a következőt:



(1 pont)

Az ABCDEF hatszög szabályos. (1 pont) Az ABK és az ABC háromszög területe egyenlő. (1 pont)

Egyenlő az AB szakasz és a rövidebb AB ív, valamint a BC szakasz és a rövidebb BC ív által határolt síkidomok területe is. (K körül 60^0-os elforgatással egymásba vihetők) (1 pont)

Tehát a kérdéses ABC síkidom területe a kör területének hatod része(1 pont), azaz $\frac{T}{3}$(1 pont) .

összesen 6 pont

3. Három különböző, nem nulla számjegyből képeztük az összes lehetséges egyjegyű, kétjegyű és háromjegyű számot, majd összeadtuk őket. Lehet-e az összeg 2022? És 1960 ?

M: Legyenek a számjegyek a, b, c. Képezhető egyjegyű számok: a, b, c ; a kétjegyű számok $\overline{ab}$, $\overline{ac}$, $\overline{bc}$, $\overline{ba}$, $\overline{ca}$, $\overline{cb}$, *a háromjegyű számok* $\overline{abc}$, $\overline{acb}$, $\overline{bac}$, $\overline{bca}$, $\overline{cab}$, $\overline{cba}$. *(1 pont)*

A keresett összeg :

$a + b + c + 20(a + b + c) + 2(a + b + c) + 200(a + b + c) + 20(a + b + c) + 2(a + b + c) = 245(a + b + c)$. *(2 pont)*

Kérdés: Lehet-e 245$(a + b + c) = 2022$. *Nem lehet, hiszen (a+b+c) egész, viszont 245 nem osztója 2022-nek(2 pont). 245(a+b+c) = 1960 lehet, egyszerűsítve a+b+c = 8, s ez többféleképpen is előáll, pl.1+3+4(2 pont).*

összesen 7 pont

4. Egy nem állandó számtani sorozat első és második, második és harmadik, illetve a harmadik és első tagjának szorzata – ebben a sorrendben – egy mértani sorozat három, egymás utáni tagja. Mekkora a mértani sorozat hányadosa?

M: Legyen a számtani sorozat második tagja a , különbsége d(1 pont) . Ekkor a mértani sorozat tagjai $(a - d)a$; $a(a + d)$; $(a + d)(a - d)$*(1 pont),*

hányadosa $\frac{a(a+d)}{(a-d)a} = \frac{(a+d)(a-d)}{a(a+d)}$*(1 pont)* .

Ebből $(a \neq 0)$ $\frac{a+d}{a-d} = \frac{a-d}{a}$; $a^2 + ad = a^2 - 2ad + d^2$;

$d^2 - 3ad = 0$ *(1 pont). Mivel* $d \neq 0$ *, ezért* $d = 3a$*(1 pont), a számtani sorozat tagjai :* $-2a$; a; $4a$, *(1 pont)* *a mértani sorozat tagjai:*$-2a^2$; $4a^2$ és $-8a^2$, *hányadosa pedig*

$q = \frac{4a^2}{-2a^2} = -2$ *(1 pont).*

összesen 7 pont

5. Oldja meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán:

$$\left.\begin{aligned} x - y - xy &= 7 \\ x^2 + y^2 - 3xy &= 19 \end{aligned}\right\}.$$

M: Rendezzük át második egyenletünket: $(x-y)^2 - xy = 19$ *(1 pont).*

Ebből vonjuk ki az elsőt: $(x-y)^2 - (x-y) = 12$. *Ez* $(x-y)$*-ra másodfokú(1 pont), megoldásai:*

$x - y = 4$ *vagy* $x - y = 3$ *(1 pont).*

$x - y = 4$ *esetén* $xy = -3$, *az* $\left.\begin{matrix} x-y=4 \\ xy=-3 \end{matrix}\right\}$ *egyenletrendszer megoldásai :*
$M_1(1;-3)$ és $M_2(3;-1)$ *(2 pont).*

$x - y = 3$ *esetén* $xy = -10$, *az* $\left.\begin{matrix} x-y=-3 \\ xy=-10 \end{matrix}\right\}$ *egyenletrendszernek nincs megoldása(1 pont).*

Eredeti egyenletrendszerünket tehát az $M_1(1;-3)$ és $M_2(3;-1)$ *számpárok elégítik ki (2 pont).*

összesen 8 pont

6. Határozza meg a következő kifejezés legkisebb értékét:

$$K(x;y) = \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2} + \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

M: Tekintsük a derékszögű koordinátarendszerben az $A(0;0)$, *a* $B(3;4)$ *és a* $P(x;y)$ *koordinátájú pontokat! (2 pont)*

Ekkor $K(x;y)$ *a P pont A és B pontoktól való távolságaik összegét jelöli(2 pont), azaz*

$K(x;y) = \overline{AP} + \overline{BP} \geq \overline{AB} = 5$ *(a háromszögegyenlőtlenség alapján) (2 pont).*

$K(x;y)$ *legkisebb értéke tehát 5. (1 pont)*

Az egyenlőség az AB szakasz pontjaira teljesül(1 pont).

összesen 8 pont

7. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$x + \sqrt{2-x} + 2 = \sqrt{x} + 3\sqrt{2x - x^2}.$$

M: Legyen $\sqrt{x} = a$, $\sqrt{2-x} = b$. *Ekkor* $x \geq 0$ és $2 - x \geq 0$, $x \leq 2$ *kell teljesüljön és teljesül a*

$2x - x^2 \geq 0$ is*(1 pont). Egyenletünk :* $a^2 + b + 2 = a + 3ab$ és $a^2 + b^2 = 2$ *is teljesül(1 pont).*

Rendezve: : $a^2 + b + 2 = a(1+3b)$, *majd négyzetre emelve és figyelembe véve, hogy* $a^2 = 2 - b^2$,

$(2 - b^2 + b + 2)^2 = (2 - b^2)(1 + 3b)^2$*(1 pont), majd további alakítások után*

$10b^4 + 4b^3 - 24b^2 - 4a + 14 = 0$ *illetve* $5b^4 + 2b^3 - 12b^2 - 2a + 7 = 0$ *adódik(1 pont).*

Ennek gyökei b = 1 és b = - 1, szorzattá alakítva : $5b^4 + 2b^3 - 12b^2 - 2a + 7 = (b-1)(b+1)(5b^2 + 2b - 7) = 0$ *(1 pont).*

Negyedfokú egyenletünk felírható a következő alakban: $(b-1)(b+1)(5b+7)=0$ *(1 pont)*,
s leolvashatók a gyökök :b = 1 ;b = - 1 és $-\frac{7}{5}$. *Mivel* $b=\sqrt{2-x}$, *csak* $b=1$ *lehet(1 pont)*.

Ekkor $\sqrt{2-x}=1$, $x=1$ *adódik, ami kielégíti eredeti egyenletünket (megfelel a feltételeknek) (1 pont)*.

összesen 8 pont