XXIX. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny

Földes Ferenc Gimnázium, Miskolc

2023. április 21.

11. évfolyam

1. Egy dátumot nevezzünk *különlegesnek*, ha a négyjegyű évszámból és a két-két számjegyből álló hónap és nap sorszámából alkotott nyolcjegyű szám jegyei különbözők. (Például a mai dátum nem különleges, mert a 20230421 számnak vannak azonos számjegyei.)

(a) A mai naphoz viszonyítva mikor volt a legutóbbi, és mikor lesz a legközelebbi különleges dátum?

(b) Hány különleges dátum volt az 1900-as években (1900.01.01. – 1999.12.31.)?

(Kárász Péter, Budapest)

2. Létezik olyan $f(x) = ax^2 + bx + c$ alakú másodfokú függvény, amelyre $f(0) = 2023$, $f(2023) = 0$ és $f(2^n)$ osztható 3-mal minden természetes n szám esetén?

(Pintér Ferenc, Nagykanizsa)

3. Oldja meg az

$$x^2 + 4046x \cdot \sin\left(\frac{xy}{17^2}\right) + 2023^2 = 0$$

egyenletet a valós számpárok halmazán.

(Péics Hajnalka, Szabadka)

4. Két kör a BC egyenest a B és C pontban érinti, egymást az A és az O pontban metszi. Az AO és BC egyenesek metszéspontja D. Határozza meg az $\frac{AO}{OD}$ arányt, ha $AB = 6$, $AC = 5$, $BC = 4$ egység.

(Pintér Ferenc, Nagykanizsa)

5. Adott a síkban 2023 pont úgy, hogy minden pontnégyesből ki lehet választani hármat, amelyek páronkénti távolsága nem nagyobb, mint 1 egység. Bizonyítsa be, hogy létezik olyan 1 egység sugarú körlap, amely legalább 1012 pontot tartalmaz a megadott 2023 pontból.

(Bálint Béla, Zsolna)

6. Az ABC háromszög C csúcsából induló szögfelező az R pontban metszi a háromszög körülírt körét. Jelölje K az AC, L a BC oldal felezőpontját. Az AC és a BC oldalak felezőmerőlegesei a CR-et a P és a Q pontokban metszik. Mutassa meg, hogy az RPK és az RQL háromszögek területe egyenlő.

(Cseh versenyfeladat)

Megoldások

1. Jelöljük a dátumot $e_1e_2e_3e_4h_1h_2n_1n_2$-vel, ahol e_i az évszám, h_i a hónap, n_i a nap számjegyei.

(a) Ebben a században nem volt különleges dátum. Az évszám első két jegye $e_1e_2 = 20$. Az $e_2 = 0$ miatt a hónap nem lehet 01-től 10-ig semmi, 11 önmagát zárja ki, 12 pedig $e_1 = 2$ miatt nem lehetséges.

A legutóbbi különleges dátumot az 1900-as években kell keresni. A legkésőbbi év 1987 lehet, azon belül a legutolsó alkalmas hónap 06 (07–12 az évszám miatt nem lehet), míg a nap 25 (31, 29, 28, 27 az évszám miatt, 30 és 26 a hónap miatt nem lehet). Az 1987.06.25. dátum megfelel a feltételeknek.

A legközelebbi különleges dátum esetén $e_1 = 2$. A hónap nem lehet 11, 12, tehát a 0 a hónap valamelyik számjegye. Ha $h_2 = 0$, azaz $h_1h_2 = 10$, akkor n_1 csak 3 lehetne, de ehhez sem 0, sem 1 nem megfelelő n_2, más lehetőség pedig nincs. Így $h_1 = 0$. Mivel a 2 és a 0 foglalt, n_1 csak 1 vagy 3 lehet, utóbbi esetben egyúttal $n_1n_2 = 31$.

Ha $e_1e_2 = 21$, akkor $n_1 = 3$, és nincs megfelelő n_2.

Ha $e_1e_2 = 23$, akkor $n_1 = 1$. A legkorábbi év 2345 lehet, ezen belül a legkorábbi hónap 06, és végül a legkorábbi nap 17. A 2345.06.17. megfelel a feltételeknek.

(b) Ebben az esetben $e_1e_2 = 19$, e_1 miatt csak $h_1 = 0$ lehet. A nap sorszáma így nem lehet 30 és 31, tehát $n_1 = 2$. Az eddig nem rögzített e_3, e_4, h_2, n_2 lehetséges értéke 3, 4, 5, 6, 7 és 8 lehet. Ezek bármely variációban létező dátumot generálnak. A különleges dátumok száma az 1900-as években $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ volt.

2. Mivel $f(0) = 2023$, ezért $c = 2023$.

Az $f(2023) = a \cdot 2023^2 + b \cdot 2023 + 2023 = 2023\,(2023a + b + 1) = 0$ egyenletből látható, hogy $a = -1$ és $b = 2022$ esetben, azaz az $f(x) = -x^2 + 2022x + 2023$ függvény teljesíti az első két feltételt.

Belátjuk, hogy az oszthatósági feltétel is teljesül. Ehhez felhasználjuk azt az ismert oszthatósági szabályt, hogy ha egy egész szám nem osztható 3-mal, akkor a négyzete 3-mal osztva mindig 1 maradékot ad. Feladatunkban $x = 2^n$ nem osztható 3-mal, ezért x^2 1-et ad 3-mal osztva, így a $-x^2 + 1$ mindig osztható 3-mal.

Vegyük észre, hogy 2022 is osztható 3-mal, így az

$$f(x) = -x^2 + 2022x + 2023 = -x^2 + 1 + 2022x + 2022$$

is osztható 3-mal.

3. **1. megoldás:** Tudjuk, hogy egy valós szám szinusza -1 és $+1$ között vehet fel értékeket, ezért fejezzük ki az egyenletből $\sin\left(\frac{xy}{17^2}\right)$-t. Mivel $x = 0$ láthatóan nem megoldás, ez minden további nélkül megtehető:

$$\sin\left(\frac{xy}{17^2}\right) = -\frac{x^2 + 2023^2}{4046x},$$

így a mondottak szerint teljesülni kell a következő feltételnek:

$$-1 \leqslant -\frac{x^2+2023^2}{4046x} \leqslant 1.$$

Utóbbi teljesülését két esetben vizsgáljuk:

(a) $x>0$ esetén $-4046x \leqslant -x^2-2023^2 \leqslant 4046x$, amely két egyenlőtlenséget tartalmaz. Rendezés után:

$$\begin{aligned} x^2-4046x+2023^2 &\leqslant 0 \qquad \text{és} \qquad x^2+4046x+2023^2 \geqslant 0, \quad \text{azaz} \\ (x-2023)^2 &\leqslant 0 \qquad \text{és} \qquad (x+2023)^2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

egyidőben kell hogy teljesüljön, amely egyenlőtlenségrendszer megoldása $x_1=2023$.

(b) $x<0$ esetén hasonló a számolás, csak a reláció iránya megváltozik:

$$(x-2023)^2 \geqslant 0 \quad \text{és} \quad (x+2023)^2 \leqslant 0,$$

amely egyenlőtlenségrendszer megoldása $x_2=-2023$.

$x_1=2023$ esetén $\sin 7y_1=-1$, ahonnan $7y_1=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$, vagyis $y_1=-\frac{\pi}{14}+\frac{2k\pi}{7}$, $k\in\mathbb{Z}$.
$x_2=-2023$ esetén $\sin(-7y_2)=1$, ahonnan $y_2=-\frac{\pi}{14}-\frac{2k\pi}{7}$, $k\in\mathbb{Z}$.

2. megoldás: Rendezzük az egyenletet az 1. megoldásnál látottak szerint:

$$\sin\left(\frac{xy}{17^2}\right) = -\frac{x^2+2023^2}{4043x}.$$

Ekkor az alábbi átalakításban $\frac{|x|}{2023}$ és $\frac{2023}{|x|}$ pozitív számokra alkalmazva a számtani-mértani közepek közötti összefüggést (vagy az $|a|+\frac{1}{|a|}\geqslant 2$ összefüggést):

$$\begin{aligned} \left|\sin\left(\frac{xy}{17^2}\right)\right| = \left|-\frac{x^2+2023^2}{4046x}\right| = \frac{x^2+2023^2}{4046\,|x|} = \frac{1}{2}\left(\frac{|x|}{2023}+\frac{2023}{|x|}\right) \geqslant \\ \geqslant \sqrt{\frac{|x|}{2023}\cdot\frac{2023}{|x|}} = \sqrt{1} = 1. \end{aligned}$$

A szinusz függvény értékkészletét tekintve csak az egyenlőség fennállása esetén van az egyenletnek megoldása. Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha

$$\frac{|x|}{2023} = \frac{2023}{|x|}, \quad \text{azaz ha} \quad |x| = 2023.$$

A további lépések az 1. megoldással megegyezően tehetők meg.

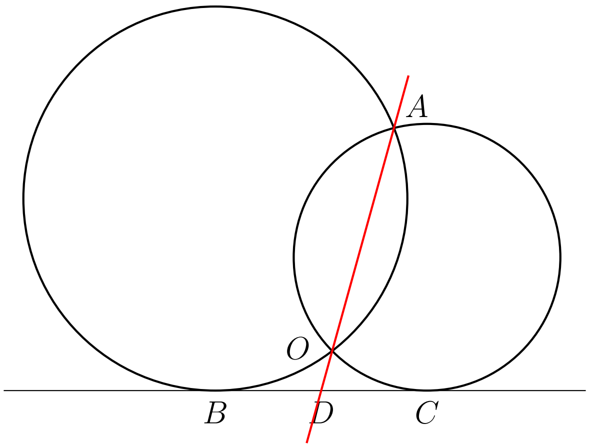
4. Az A és O pontok elhelyezkedése miatt (elvileg) két elhelyezés van (1. és 2. ábra).

Viszont mindkét elhelyezkedés esetén felírhatjuk a D pont körre vonatkozó hatványát, ami ugyanaz:

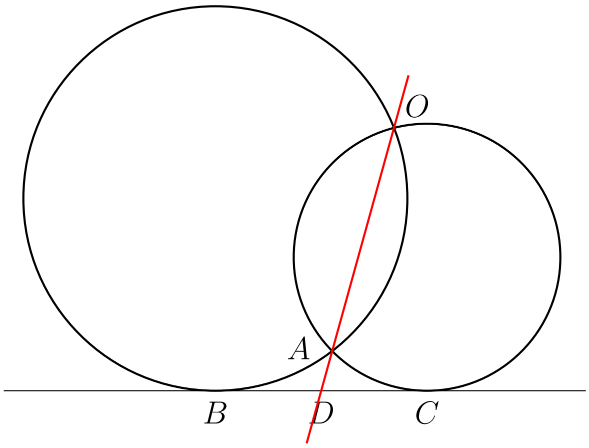
$$DB^2 = DO\cdot DA = DC^2, \quad \text{azaz} \quad BD = DC = 2. \tag{1}$$

Ezért az ABC háromszögben az AD súlyvonal. Alkalmazzuk a „súlyvonal” képletet:

$$AD = \frac{\sqrt{2\left(AB^2+AC^2\right)-BC^2}}{2} = \frac{\sqrt{106}}{2}.$$



1. ábra.



2. ábra.

Mivel $AD > 2 = BD$, ezért (1) miatt a 2. ábra szerinti elhelyezkedés nem lehetséges.

Az 1. ábra szerinti esetben

$$OD = \frac{BD^2}{AD} = \frac{8}{\sqrt{106}},$$
$$AO = AD - OD = \frac{\sqrt{106}}{2} - \frac{8}{\sqrt{106}} = \frac{45}{\sqrt{106}}, \quad \text{ezért}$$
$$\frac{AO}{OD} = \frac{45}{8}.$$

5. Először a feltételből egy másik állítást, észrevételt igazolunk.

Állítás: Ha minden pontnégyesből ki lehet választani hármat, amelyek páronkénti távolsága nem nagyobb, mint 1, akkor minden pontármasból ki lehet választani kettőt, amelyek távolsága nem nagyobb, mint 1.

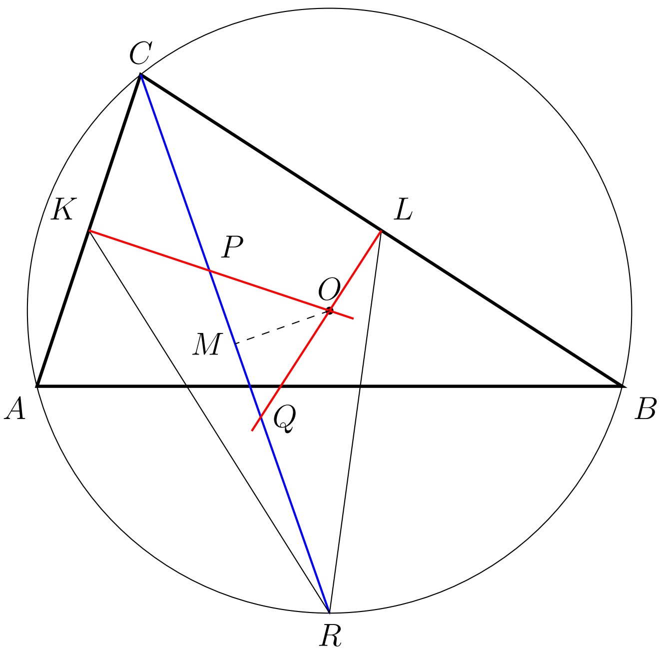
Tegyük fel, hogy az állításunk nem igaz, tehát létezik három olyan pont, pl. X, Y, Z, amelyek páronkénti távolsága nagyobb, mint 1. Ha az X, Y, Z pontokhoz felveszünk egy tetszőleges U pontot, akkor az X, Y, Z, U pontnégyesből nem választható ki három pont, amelyek páronkénti távolsága nem nagyobb, mint 1 (mert az X, Y, Z pontok közül legalább kettő marad). Ezzel az állításunkat bebizonyítottuk, tehát érvényes, hogy minden ponthármasból ki lehet választani két pontot, amelyek távolsága nem nagyobb, mint 1.

Legyen A az adott 2023 pont bármelyike. Ha az A középpontú $k_1(A;1)$ egységsugarú körlap tartalmaz legalább 1012 pontot, akkor az állítás be van bizonyítva. Legyen tehát ebben a körlapban maximálisan 1011 pont. Ekkor az adott pontok között biztosan létezik olyan B pont, amelyre $AB > 1$. Most viszont a $k_2(B;1)$ körlap tartalmaz legalább 1012 pontot. Ellenkező esetben ugyanis létezne az adott 2023 pont között olyan, a két körlemezen kívüli C pont, amelyre $CB > 1$ és $CA > 1$, ami ellentmond az állításban megfogalmazottnak.

Tehát létezik olyan 1 sugarú körlap, amely legalább 1012 pontot tartalmaz az adott 2023 pontból.

6. Ha $P = Q$, akkor ez azt jelenti, hogy ebben a pontban metszi egymást az AC és a BC oldal felezőmerőlegese, azaz e közös pont egyben a háromszög köré írt körének a középpontja is ($P = Q = O$), így a CR szögfelező merőleges az AB oldalra. Ekkor az RPK és az RQL háromszögek területe szimmetria okokból egyenlő.

A továbbiakban feltételezzük, hogy $P \neq Q$. Ekkor a PK és az LQ egyenesek metszéspontja a háromszög körülírt körének középpontja, O.



3. ábra.

A CLQ és a CKP derékszögű háromszögek, és a C csúcsnál lévő szögük is egyenlő, tehát a két háromszög hasonló, ezért

$$\frac{CQ}{CP} = \frac{QL}{PK}, \quad \text{azaz} \quad PK \cdot CQ = QL \cdot CP.$$

Másrészt az OPQ háromszög egyenlő szárú, mert $KPC\sphericalangle = CQL\sphericalangle = OQP\sphericalangle$.

Ebből következik, hogy a kör O középpontjából a CR-re húzott merőleges M talppontja nem csak a CR húrt, hanem a PQ szakaszt is felezi. Ezért igazak a következő egyenlőségek:

$$CP = QR, \qquad CQ = PR.$$

Jelölje a két kérdéses területet T_{PRK} és T_{QRL}, és írjuk fel a két kérdéses terület arányát:

$$\frac{T_{PRK}}{T_{QRL}} = \frac{PK \cdot PR \cdot \sin RPK\sphericalangle}{QL \cdot QR \cdot \sin RQL\sphericalangle} = \frac{PK \cdot CQ \cdot \sin CPK\sphericalangle}{QL \cdot CP \cdot \sin CQL\sphericalangle} = 1.$$

Ezzel beláttuk, hogy a két terület valóban egyenlő.