XXIX. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny

Földes Ferenc Gimnázium, Miskolc

2023. április 21.

---

9. évfolyam

1. Egy osztályban karácsony előtt minden fiú adott minden lánynak egy-egy csokit, a lányok mindegyike pedig adott az összes fiúnak egy-egy cukorkát. Az ajándékozás után minden fiú megevett a kapott cukorkák közül kettőt, a lányok mindegyike pedig három csokit. Így elfogyott az édességek negyedrésze. Határozza meg, hogy legfeljebb hány tanulója lehetett az osztálynak.

2. A teniszben az ún. rövidített játékot (tiebreak-et) az a játékos nyeri meg, aki legalább 7 pontot elér, és pontszáma legalább kettővel több, mint a másik játékosé. Dia és Viki mérkőzésén a döntő játszmában rövidítésre került sor. Kezdetben még Dia vezetett 4:2-re, de 5:6-nál már Vikinél volt az előny. Végül a rövidítést 12:10-re Dia nyerte meg, és ezzel ő lett a mérkőzés győztese. A teljes rövidítést tekintve hányféle sorrend szerint szerezhették meg a lányok pontjaikat? (Két sorrendet akkor tekintünk különbözőnek, ha valamelyik labdamenetet nem ugyanaz a játékos nyeri meg.)

3. Az ABC hegyesszögű háromszögben $AC \neq BC$. Legyen T a háromszög C csúcsához tartozó magasságának talppontja, O pedig a körülírt kör középpontja. Igazolja, hogy az $ATOC$ és a $BTOC$ négyszögek területe egyenlő.

4. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert a valós számok halmazán:

$$\left.\begin{aligned} |x| + |y| + z &= 2021 \\ |x| + y + |z| &= 2023 \\ x + |y| + |z| &= 2025 \end{aligned}\right\}$$

5. Keresse meg azokat a pozitív egész, összetett számokat, amelyeknek valódi osztóihoz (azaz 1-től és önmaguktól különböző osztóihoz) 1-et hozzáadva megkapjuk egy másik pozitív egész szám összes valódi osztóját.

6. Az $ABCDE$ ötszögben a B és az E csúcsnál lévő szög $90°$, $AB = EA$ és $BC = CD = DE$. A BD és a CE átlók az F pontban metszik egymást. Bizonyítsa be, hogy $AF = AB$.